DOI: https://doi.org/10.32347/2077-3455.2021.61.410-327
УДК 519.857

Човнюк Юрій Васильович,
к.т.н., доцент кафедри організації авіаційних робіт і послуг,
Національний авіаційний університет, м. Київ
ychovnyuk@ukr.net,
https://orcid.org/0000-0002-0608-0203
Разумова Катерина Миколаївна,
д.ек.н., професор, завідувач кафедри організації авіаційних робіт і послуг,
Національний авіаційний університет, м. Київ
krazum@ukr.net,
https://orcid.org/0000-0001-6385-2823
Чередніченко Петро Петрович,
доцент кафедри міського будівництва,
Київський національний університет будівництва і архітектури
petro_che@ukr.net,
https://orcid.org/0000-0001-7161-661X
Міщенко Олена Дмитрівна,
старший викладач кафедри міського будівництва,
Київський національний університет будівництва і архітектури
mischenko.od@knuba.edu.ua,
https://orcid.org/0000-0002-4493-9648

ЗАСТОСУВАННЯ «ХВИЛЬОВОГО» МЕТОДУ ДО РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПАСАЖИРІВ ТА ВАНТАЖІВ У МЕГАПОЛІСАХ ЗАДЛЯ ВДОСКОНАЛЕННЯ ЇХ ТРАНСПОРТНОЇ МЕРЕЖІ Й ІНФРАСТРУКТУРИ.
Концептуальні основи, математичне забезпечення.

Анотація: пропонується новий підхід до розв’язку задач оптимізації, які виникають у інженерній та транспортній логістиці при проектуванні та будівництві доріг (зокрема, у мегаполісах, поблизу великих транспортних вузлів, поблизу кордонів держави) задля перевезення вантажів та пасажирів й реалізації міжнародної торгівлі. Розглянуті фундаментальні задачі сучасної інженерної логістики – задача про оптимальне розміщення (транспортних вузлів) й задача про ідентифікацію та сегментацію логістичних, транспортно-логістичних зон. Вказані задачі розв’язуються за допомогою методів варіаційного числення, зокрема, т.з. «хвильового» методу, заснованого на принципі Ферма, існуючого у фізичній оптиці, котрий базується на аналогії між знаходженням глобального екстремуму інтегрального функціоналу й розповсюдженням світла у оптично неоднорідному середовищі. Для вказаного методу розроблений чисельний алгоритм для ПЕОМ.

Ідея «хвильового методу/підходу належить В.В. Башурову, котрий запропонував використовувати методи геометричної та фізичної оптики для дослідження прикладних задач безпеки та деяких суміжних питань. Сутність «хвильового методу» полягає у тому, що спочатку задача безпеки зводиться до пошуку глобального мінімуму нелінійного функціоналу. У свою чергу, задача мінімізації розв’язується шляхом побудови траєкторії руху фронту «світлової хвилі», котрий рухається у оптично неоднорідному середовищі.

Відшукання мінімуму функціоналу є класичною задачею варіаційного числення, для розв’язку котрої розроблений значний математичний апарат. Однак більшість відомих методів ефективно визначають тільки локальні екстремуми. «Хвильовий» метод дозволяє ефективно розв’язувати задачу знаходження глобального екстремуму.

У даній роботі запропонована концептуальна основа та науково обґрунтована модифікація даного «хвильового» методу задля розв’язку задач оптимізації, виникаючих у інженерній та транспортній логістиці, у тому числі задачі про оптимальне розміщення транспортного вузла, транспортно-логістичного центру (складу) й задач оптимальної ідентифікації та сегментації логістичних зон (мегаполісів, великих транспортних вузлів).

Ключові слова: хвильовий метод; розв’язок задач оптимізації; інженерна/транспортна логістика; варіаційне числення; принцип Ферма; методи геометричної оптики; мегаполіси; великі транспортно-логістичні центри; вузли; склади.

Постановка проблеми. Оптимізація перевезень пасажирів та вантажів у сучасних мегаполісах задля поліпшення транспортної інфраструктури останніх є однією з фундаментальних проблем інженерної/транспортної логістики й тому різноманітні задачі такого класу виникають у даній області доволі часто. Як правило, розв’язок таких задач здійснюється фахівцями-логістами з використанням досить простого математичного апарату. У більшості випадків мова йде про застосування методів теорії графів чи різноманітних модифікацій задачі лінійного програмування [1-3].

Для розв’язку однієї з фундаментальних задач логістики – задачі про оптимальне розміщення, наприклад, у мегаполісі логістичного центру - традиційно використовується метод «центра тяжіння», заснований на ототожненні логістичної системи з системою матеріальних точок [1] та його модифікації. У [4] запропонований метод визначення оптимального місцезнаходження базового контейнерного терміналу, заснований на методі дихотомії. Даний метод також можна застосовувати для визначення оптимального розміщення складу. Перевагою усіх вказаних вище методів є їх простота та універсальність. Однак зрозумілі й певні недоліки, головний з котрих пов'язаний з тим, що не використовується у повному об'ємі інформація про стан транспортної мережі, про рельєф місцевості, про наявність природних перепон (гори, водойми, яри), про щільність населення тощо.

При розв'язуванні ще однієї важливої для сучасної інженерної/транспортної логістики задачі ідентифікації й сегментації логістичних зон (визначення границь зон приналежності) тривалий час застосовувались прості концептуальні (тобто описові) моделі [5]. В останні роки у науковій літературі стали з'являтись роботи, котрі для розв'язку даних логістичних задач застосовують методи кластеризації, засновані на теорії нечітких множин з використанням математичного програмування [6,7]. Даний напрямок є доволіперспективним. Однак подібний підхід не завжди може бути застосованим, особливо у випадку, коли задача є неперервною, а не дискретною, завдяки тому, що існує проблема адекватного визначення функції належності (про це мова піде у другій і наступних частинах даного дослідження).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У даному дослідженні задля того, щоб здолати вказані недоліки, притаманні методам, котрі раніше використовувались для розв'язку задач оптимізації, виникаючих у інженерній/транспортній логістиці, авторами пропонується використовувати підхід, заснований на аналогії між розповсюдженням світла (у неоднорідному оптичному середовищі) й відшуканням глобального екстремуму функціонала («хвильовий метод»). (Зазначимо, що у геометричній оптиці існує відомий принцип Ферма, згідно якого світло розповсюджується у неоднорідному оптичному середовищі від точки А до точки В найкоротшим шляхом, тобто таким шляхом (як правило, це криволінійна траєкторія), оптична довжина котрого є найменшою).

Ідея подібного підходу належить, зокрема, В.В. Башурову [8,9], котрий запропонував використовувати методи геометричної оптики для дослідження прикладних задач безпеки та деяких суміжних питань. Сутність «хвильового методу» полягає у тому, що спочатку задача безпеки зводиться до пошуку глобального мінімуму нелінійного функціоналу. У свою чергу, задача мінімізації розв'язується шляхом побудови траєкторії руху фронту «світлової» хвилі, який рухається у оптично неоднорідному середовищі.

Відшукання мінімуму функціоналу є класичною задачею варіаційного числення [10-12], для розв'язку котрої розроблений великий за обсягом і потужний математичний апарат [10,12]. Однак більшість відомих методів ефективно визначають тільки локальні екстремуми. «Хвильовий» метод дозволяє ефективно розв’язувати задачу знаходження глобального екстремуму.

Подібний підхід до розв’язку вказаних вище задач є **актуальним і новим**, й для вирішення типових проблем інженерної/транспортної логістики використовується вперше. Слід зазначити, що авторам даної роботи не вдалось знайти (після детального аналізу) у літературі аналогічних підходів у цій сфері людської (економічної) діяльності.

Мета даного дослідження полягає у обґрунтуванні модифікації «хвильового» методу задля розв’язування задач, які виникають у інженерній/транспортній логістиці, у тому числі задачі про оптимальне розміщення логістичного центру (складу) мегаполісу (друга частина дослідження) та задач оптимальної ідентифікації й сегментації транспортно-логістичних зон великих міст (третя частина дослідження).

Задля досягнення вказаних вище цілей даної роботи використовуються наступні **методи дослідження:** 1) методи математичної фізики; 2) методи математичного моделювання; 3) методи класичного варіаційного числення.

Основні результати та їх обговорення.

1. <u>Постановка задачі про прокладку дороги.</u> Опишемо метод найбільш детально на прикладі розв’язку задачі про прокладку дороги від пункту А до пункту В. Нехай необхідно визначити оптимальний у певному сенсі маршрут (наприклад, з найменшими витратами на будівництво) з пункту А у пункт В. Зазвичай ця задача розв’язується методами теорії графів [3]. Однак у багатьох випадках число можливих варіантів прокладки дороги не є скінченим і навіть ліченим, тобто задача не може бути адекватно формалізована у межах теорії графів.

Нехай у деякій обмеженій області $D \subseteq R^2$ з кусково-гладкою границею задача інтегрована (наприклад, кусково-неперервна) функція $f(x,y) \ge 0,$ яка характеризує вартість прокладки дороги (шляху) у точці $(x,y).$ Тоді вартість будівництва дороги з А до В вподовж маршруту Г обчислюється як:

$$B(\Gamma) = \int_{\Gamma} f(x,y)d\Gamma. \tag{1}$$

Функція $f(x,y)$ може бути задана таблично, її аналітичний вид у загальному випадку невідомий. Необхідно знайти таку лінію Γ_0 з $G(A,B)-$множини кусково-гладких кривих, які лежать у області D й з’єднують точки А та В, вподовж котрої інтегральний функціонал (1) приймає мінімальне значення:

$$\min\ B(\Gamma)=\int\limits_{\Gamma_0} f(x,y)d\Gamma,\ \ \Gamma\in G(A,B). \tag{2}$$

З точки зору геометричної оптики, вираз (2) визначає час, за який світло, випущене з точки А, досягне точки В, рухаючись у оптично-неоднорідному середовищі з місцевою швидкістю світла $c(x,y)=1/f(x,y)$ [13].

Згідно з принципом Гюйгенса будь-яку точку області D, котрої вже досягло світло, можна розглядати у якості самостійного джерела світла. Таким чином, випускаючи світлову хвилю з точки А, можна побудувати траєкторію її руху й зафіксувати фотон, котрий першим досягне точки В. Далі, рухаючись у зворотному напрямку по часу, можна відтворити траєкторію руху цього фотона, котра й буде шуканою кривою Г*. При цьому зрозуміло, що якщо задача розв'язувана, тоді хоча б один розв'язок буде знайдений.

Приклад. Знайдемо і розв'яжемо диференціальне рівняння ліній розповсюдження світла у оптично неоднорідному середовищі, де швидкість розповсюдження світла дорівнює $v(x,y)$. Згідно принципу Ферма світло розповсюджується з однієї точки $A(x_0,y_0)$ у іншу $B(x_1,y_1)$ вподовж кривої. Для котрої час T проходження світла буде найменшим. Якщо рівняння шуканої кривої $y=y(x)$, тоді:

$$T=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x,y)}dx\Rightarrow \min. \tag{3}$$

У найбільш загальному випадку рівняння Ейлера для цього функціоналу (3), котре визначає необхідну умову досягнення екстремуму, має вид:

$$\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'}{v\cdot\sqrt{1+(y')^2}}\right\}=0 \tag{4}$$

і буде тим, котре визначає лінії розповсюдження світла.

Розглянемо частинні випадки, коли рівняння (4) може бути розв'язане у квадратурах.

Випадок А. $v(x,y)=C\cdot x;\ \ \dfrac{\partial v}{\partial y}=0;\ \ y(x_1)=y_1;\ \ y(x_2)=y_2.$ (5)

Розв'язок (4) має вид:

$$\begin{cases} (y-C_2)^2+x^2=\dfrac{1}{(C\cdot C_1)^2}; \; \dfrac{(y_1-C_2)^2+x_1{}^2}{(y_2-C_2)^2+x_2{}^2}=1; \\ \left[(y_1-C_2)^2+x_1{}^2\right]\cdot\left[(y_2-C_2)^2+x_2{}^2\right]=(C_1\cdot C)^{-4}. \end{cases} \qquad (6)$$

Випадок Б. $v(x,y)=C\cdot y;\; y(x_1)=y_1;\; y(x_2)=y_2.$ (7)

Розв’язок (4) має вид для $y_1=x_1=0$:

$$(x-C_1)^2+y^2=C_2{}^2;\; \frac{(x_2-C_1)^2+y_2{}^2}{(x_1-C_1)^2+y_1{}^2}=1;\; C_1=C_2. \qquad (8)$$

Випадок В. $v(x,y)=C\cdot\sqrt{y};\; y(0)=0;\; y_1=y(x_1).$ (9)

Розв’язок (4) дає рівняння екстремалей у вигляді циклоїд (розв’язок записаний у параметричному виді):

$$x=C_1\cdot(t-\sin t);\;\; y=C_1\cdot(1-\cos t). \qquad (10)$$

Коефіцієнт C_1 знаходимо з трансцендентного співвідношення:

$$x_1=C_1\cdot\left\{\arccos\left(1-\frac{y_1}{C_1}\right)-\sin\left[\arccos\left(1-\frac{y_1}{C_1}\right)\right]\right\}. \qquad (11)$$

2. Постановка задачі про оптимізацію маршруту руху транспортних засобів, які забезпечують постачання товарів виробника продукції через мережу складів до споживача.

2.1. Задача про оптимізацію маршрутів руху транспортних засобів конкретного транспортно-логістичного центру, розміщеного на території товаровиробника й здійснюючих постачання товарів через мережу складів до споживачів цих товарів, які знаходяться у конкретному регіоні, може бути зведена до знаходження методами варіаційного числення екстремалей з кутовими точками.

До подібних задач належать задачі на відбиття й заломлення екстремалей, котрі є узагальненням відповідних задач на відбиття й заломлення світла у оптично неоднорідних середовищах. (Як і раніше, критерієм оптимізації траєкторії руху (світла) є мінімальний час проходження світлового променя з точки $A(x_0,y_0)$ (місцезнаходження товаровиробника та його транспортно-логістичного центру обслуговування) до точки $B(x_2,y_2)$(місцезнаходження споживача певної групи товарів товаровиробника). При цьому крива (маршрут руху конкретного транспортного засобу) повинна досягти точки B лише після відбиття від заданої лінії $y=\varphi(x)$, котра описує місцеположення низки складів товаровиробника, які знаходяться поодаль точки $A(x_0, y_0)$ (задля забезпечення розширення сфери впливу і збуту готових товарів даного товаровиробника) (рис.1).

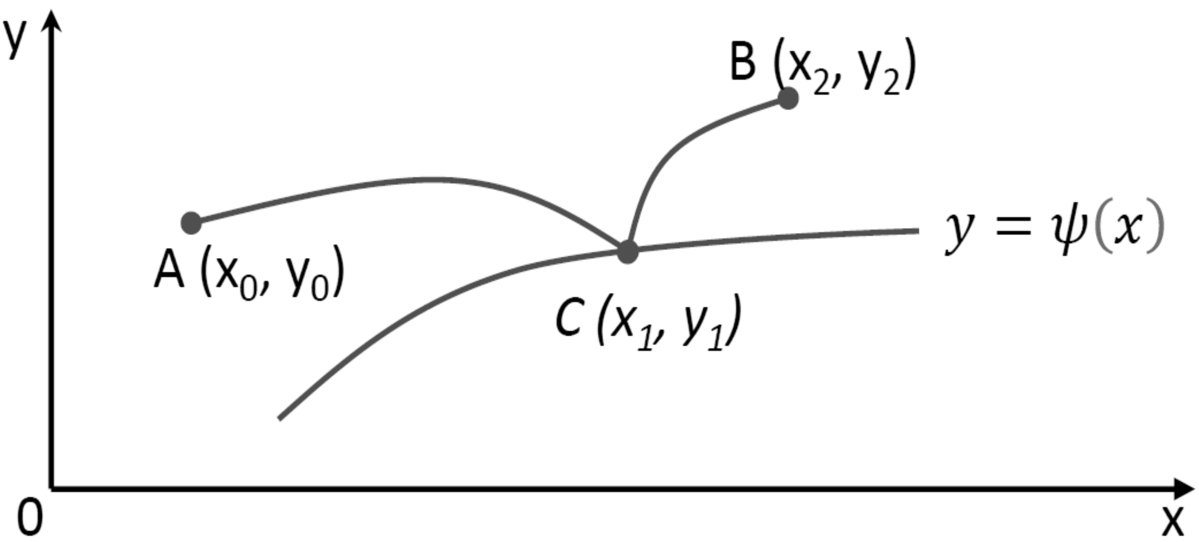

Рис.1. Геометрія задачі 2.1.

Необхідно знайти на кривій $y=\varphi(x)$ місцеположення такого складу (точка $C(x_1, y_1)$), після завантаження у якому транспортних засобів товаровиробника, термін доставки (від точки A до B), що включає у себе холостий хід транспортного засобу (від A до C) й завантажений рух останнього (від C до B), буде мати мінімальне значення ($T_{A\to C\to B} \Rightarrow \min$).

Якщо транспортний засіб рухається по маршруту $A \to C \to B$ з деякою швидкістю $v(x,y)$, тоді час, який витрачається на переміщення транспорту з положення $A(x_0, y_0)$ у положення $B(x_2, y_2)$, дорівнює інтегралу:

$$T_{ACB} = \int_{x_0}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x,y)} dx \Rightarrow \min. \qquad (12)$$

Цей інтеграл (12) належить до різновиду функціоналів $\int_{x_0}^{x_2} A(x,y)\cdot\sqrt{1+(y')^2}dx$ і за будь-якого закону зміни швидкості транспортного засобу $v(x,y)$ у точці відбиття (точка $C(x_1, y_1)$) кут падіння дорівнює куту відбиття (рис. 2).

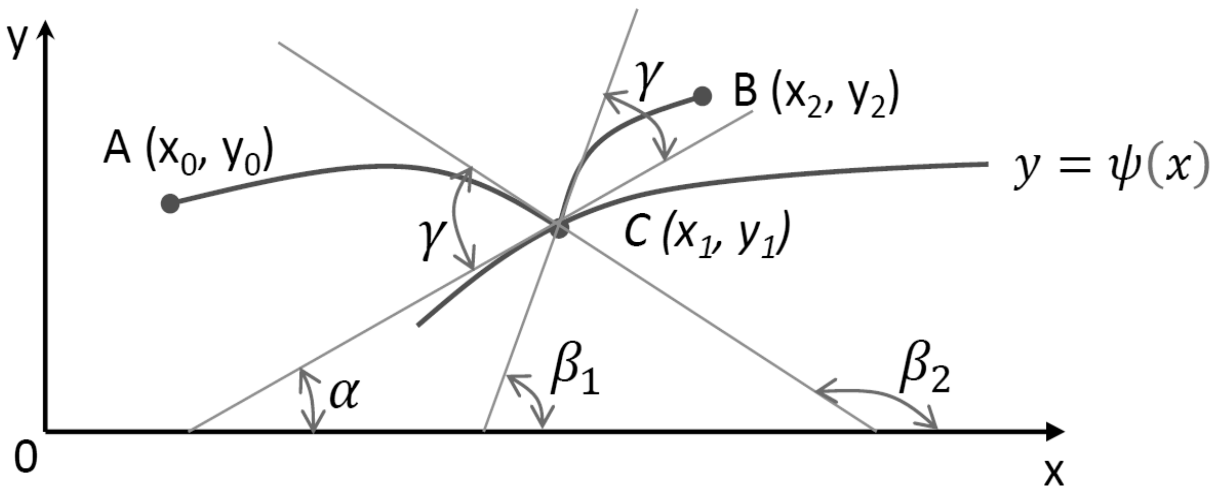

Рис. 2. Оптимальний маршрут транспортного засобу від А до В через С.

Якби точки А, В та С були розміщені інакше, наприклад, так, як вони розміщені на рис. 1, тоді для отримання тієї ж умови у точці відбиття завдяки двозначності функції $y = y(x)$ зручніше було б проводити дослідження у параметричній формі.

2.2.Заломлення екстремалей. Розглянемо задачу, сформульовану у п. 2.1, у іншій постановці. Припустимо, що підінтегральна функція функціоналу $J = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx$ у розглядуваній області має лінію розриву $y = \varphi(x)$, а граничні точки A та B розміщені по різні сторони лінії розриву (рис. 3).

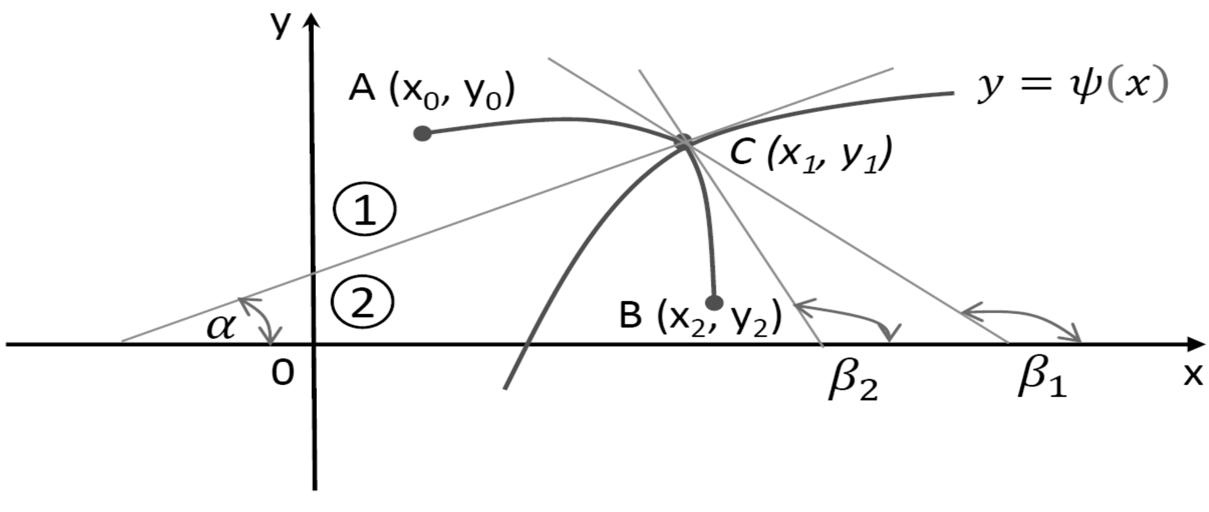

Рис.3. Геометрія задачі п. 2.2.

У цьому випадку на границі $y=\varphi(x)$ повинні виконуватись співвідношення, які характерні для узагальнення відомого закону заломлення світла: відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення дорівнює відношенню швидкостей руху світла у середовищах 1 та 2, тобто $v_1(x,y)$ й $v_2(x,y)$:

$$\frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right\}}=\frac{v_1(x,y)}{v_2(x,y)}. \tag{13}$$

2.3. Наведемо нижче всі отримані результати (траєкторії, залежності $y(x)$) для реалізації мінімальних значень функціоналів (часу T) у двовимірному випадку, які інтегруються у квадратурах.

1) $$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx\Rightarrow\min \;\Leftrightarrow x^2+(y-C_2)^2=C_1{}^{-2}; \tag{14}$$

2) $$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y^{-1}}dx\Rightarrow\min \;\Leftrightarrow (\textit{ланцюгові лінії}):\; y=C_1\cdot ch\left\{\frac{x-C_2}{C_1}\right\}; \tag{15}$$

3)
$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx\Rightarrow\min \;\Leftrightarrow\; (\textit{циклоїди, параметрична форма}):\; \begin{cases} x-C_2=\frac{C_1}{2}\cdot(2t-\sin(2t)); \\ y=\frac{C_1}{2}\cdot(1-\cos(2t)); \end{cases} \tag{16}$$

4) $$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx\Rightarrow\min \;\Leftrightarrow\; (\textit{кола}):\; (x-C_1)^2+y^2=C_2{}^2; \tag{17}$$

5) $$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x,y)}dx\Rightarrow\min \;\Leftrightarrow\; (\textit{розв'язок рівняння}):\; \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{v\cdot\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0. \tag{18}$$

В усіх випадках, зазначених вище, (14)-(18), невизначені константи C_1, C_2 можна знайти з наступних умов: $y(x)\big|_{x=x_0}=y_0;\; y(x)\big|_{x=x_1}=y_1$.

У випадку, коли слід знайти мінімум функціоналу, тобто $T=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\Rightarrow\min$, а значення $y_0=\psi(x_0),\; y_1=\varphi(x_1)$, тобто «ковзають» вподовж зазначених кривих (рис. 4), крім необхідної умови (диференціальне рівняння Ейлера):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0, \tag{19}$$

слід також виконати дві умови трансверсальності:

$$\begin{cases} \left[F + (\varphi' - y') \cdot F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0; \\ \left[F + (\psi' - y') \cdot F_{y'}\right]_{x=x_0} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

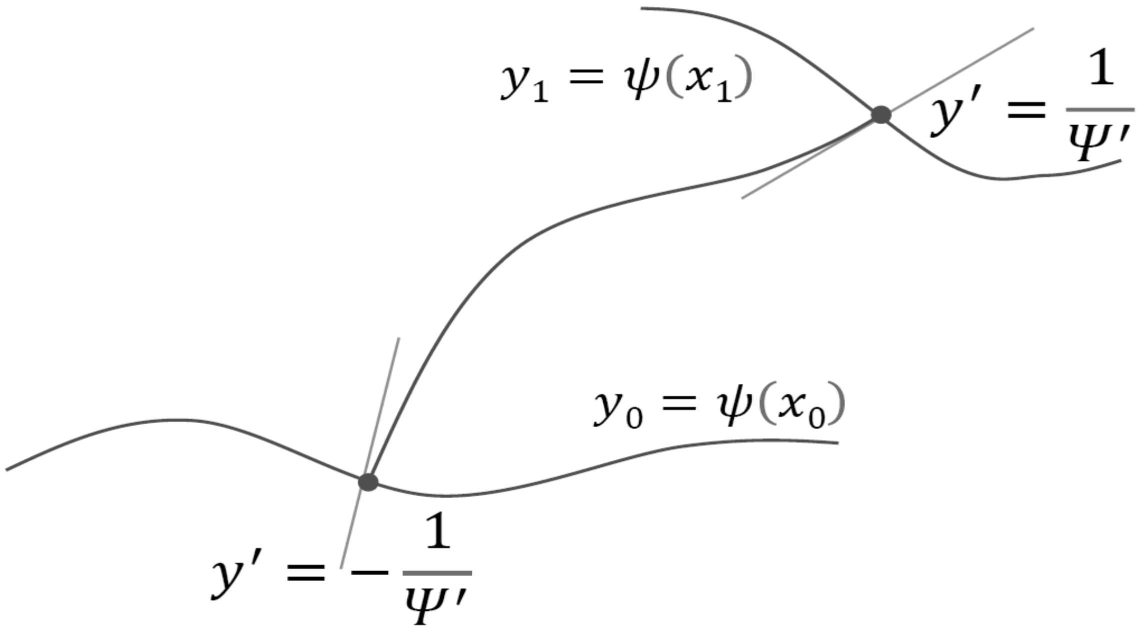

Рис.4.

Якщо точка (x_1, y_1) переміщується по вертикальній прямій додається умова:

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0, \tag{21}$$

а при переміщенні точки (x_1, y_1) тільки вподовж горизонтальної прямої додається умова:

$$\left[F - y' \cdot F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0. \tag{22}$$

(Слід зазначити, що точка (x_0, y_0) при цьому залишається фіксованою).

2.4. Постановка задачі у тривимірному випадку. Необхідно знайти диференціальне рівняння ліній розповсюдження світла у оптично неоднорідному середовищі, у якому швидкість розповсюдження світла дорівнює $v(x,y,z)$. Слід знайти умови реалізації екстремуму (мінімуму) наступного функціоналу:

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}{v(x,y,z)}dx\Rightarrow\min. \tag{23}$$

Рівняння Ейлера (необхідні умови реалізації екстремуму функціоналу (23)) приймають наступний вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial y}\cdot\dfrac{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}{v^2}+\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{v\cdot\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}\right)=0;\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial z}\cdot\dfrac{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}{v^2}+\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{v\cdot\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}\right)=0.\end{cases} \tag{24}$$

2.5. Встановимо умови, за яких можлива реалізація екстремуму (мінімуму) функціонала (у найбільш загальному випадку) для тривимірної постановки задачі:

$$T=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx\Rightarrow\min,\ \ y'=\frac{dy}{dx},\ \ z'=\frac{dz}{dx}. \tag{25}$$

Рівняння Ейлера приймають у цьому випадку (25) наступний вид:

$$F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})=0,\ \ F_z-\frac{d}{dx}(F_{z'})=0. \tag{26}$$

Чотири довільні невизначені константи рівнянь (26) C_1, C_2, C_3, C_4 знаходяться з умов відомих значень координат точок $A(x_0,y_0,z_0)$ та $B(x_1,y_1,z_1)$.

Якщо гранична точка $B(x_1,y_1,z_1)$ переміщується вподовж деякої кривої: $y_1=\varphi(x_1),\ z_1=\psi(x_1),$ а точка $A(x_0,y_0,z_0)$ - фіксована, тоді до системи рівнянь Ейлера (26) необхідно додати наступну умову трансверсальності:

$$\left[F+(\varphi'-y')\cdot F_{y'}+(\psi'-z')\cdot F_{z'}\right]_{x=x_1}=0. \tag{27}$$

Якщо гранична точка $B(x_1,y_1,z_1)$ може переміщуватись вподовж деякої поверхні $z_1=\varphi(x_1,y_1)$, а точка $A(x_0,y_0,z_0)$, як і вище, фіксована (такі задачі можуть виникати при прокладанні маршруту у гірській місцевості, де необхідно будувати тунелі), тоді до системи рівнянь Ейлера (26) слід додати наступні умови трансверсальності:

$$\begin{cases} \left[F - y' \cdot F_{y'} + (\varphi'_x - z') \cdot F_{z'}\right]_{x=x_1} = 0; \\ \left[F_{y'} + F_{z'} \cdot \varphi'_y\right]_{x=x_1} = 0. \end{cases} \tag{28}$$

2.6. Визначимо умови, за яких реалізується екстремум (мінімум) функціоналу (для часу T) у тривимірному випадку:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \widetilde{A}(x,y,z) \cdot \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx \Rightarrow \min, \tag{29}$$

якщо точка $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$ («ковзає» по поверхні $z = \varphi(x,y)$), а точка $B(x_2, y_2, z_2)$ - фіксована. У цьому випадку умови трансверсальності (28) дещо спрощуються і приймають вид:

$$\left[1 + \varphi'_x \cdot z'\right]_{x=x_1}; \ \left[y' + \varphi'_y \cdot z'\right]_{x=x_1} = 0, \tag{30}$$

а рівняння Ейлера залишаються такими ж, як у (26), лише з заміною:

$$F(x,y,z,y',z') \Leftrightarrow \widetilde{A}(x,y,z) \cdot \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}. \tag{31}$$

Умови трансверсальності (30) можна подати у вигляді:

$$\frac{1}{\varphi'_x} = \frac{y'}{\varphi'_{y'}} = \frac{z'}{(-1)} \ \ \textit{при} \ x = x_1. \tag{32}$$

Тобто умова (32), по суті, є умовою паралельності вектору дотичної $\vec{t}(1, y', z')$ до шуканої екстремалі у точці (x_1, y_1, z_1) й вектора нормалі $\vec{N}(\varphi'_x, \varphi'_{y'}, -1)$ до поверхні $z = \varphi(x,y)$ у точці (x_1, y_1, z_1). Отже, умова трансверсальності стає у даному випадку умовою ортогональності екстремалі до поверхні $z = \varphi(x,y)$.

Приклад. Знайдемо екстремальну відстань між двома поверхнями: $z = \varphi(x,y)$ та $z = \psi(x,y)$. (Математична модель прокладання залізничної колії, яка проходить через два тунелі у суміжних горах, що трапляються на шляху магістралі). Тобто слід знайти екстремум (мінімум) функціоналу:

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx \Rightarrow \min,\;\; z_0=\varphi(x_0,y_0),\;\; z_1=\psi(x_1,y_1). \quad (33)$$

У даному випадку екстремалі є прямими лініями, а умови трансверсальності у точках (x_0,y_0,z_0) й у точці (x_1,y_1,z_1) переходять в умови ортогональності. Звідси можна зробити наступний висновок: екстремум (мінімум) може бути досягнутий у даному випадку лише на прямих, ортогональних як до поверхні $z=\varphi(x,y)$ у точці (x_0,y_0,z_0), так й до поверхні $z=\psi(x,y)$ у точці (x_1,y_1,z_1) (Рис. 5).

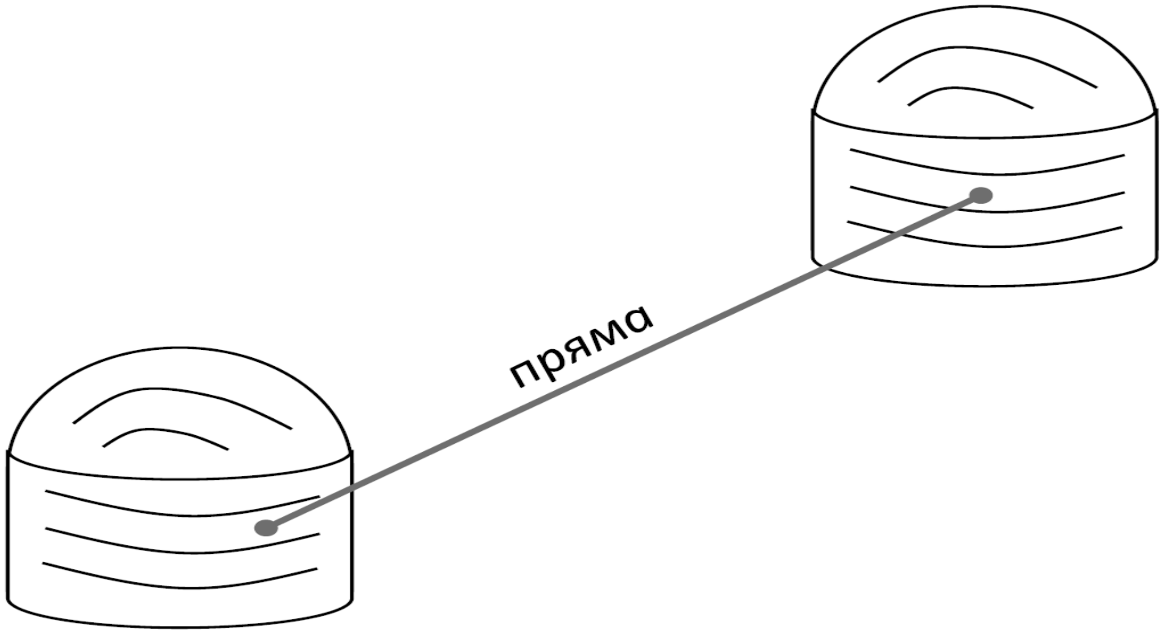

Рис. 5.

ВИСНОВКИ

1. Підводячи підсумки проведеного дослідження, зазначимо, що задачі оптимізації, котрі виникають у транспортній логістиці, у тому числі задачу про оптимальне прокладання дороги між двома пунктами, вдається звести до задач, які розв’язуються методами класичного варіаційного числення.

2. Для розв’язку задачі мінімізації відповідного функціоналу використаний “хвильовий» метод, заснований на аналогії між задачами оптимізації й задачами геометричної/фізичної оптики (використання принципів Ферма та Гюйгенса).

3. Розроблений підхід може застосовуватись у подальшому для розв’язку прикладних задач у області транспортної/інженерної логістики. У перспективі

розроблені методи пропонується інтегрувати з сучасними інформаційними технологіями й використати при створенні системи підтримки прийняття рішень для задач управління транспортно-логістичною інфраструктурою великих міст/мегаполісів України.

Література

1. *Лукинский В.С., Лукинский В.В., Малевич Ю.В. и др.* Модели и методы теории логистики. СПб.: Изд-во Питер, 2007.

2. Логистика. *Под ред. Б.А. Аникина.* М.: ИНФРА-М, 2001.

3. *Ельдештейн Ю.М.* Логистика: учебник. Красноярск: Изд-во КГАУ, 2006.

4. *Казаков А.Л., Поспелов А.М.* Определение оптимального местонахождения базового контейнерного терминала // Транспорт Урала. 2008. № 2(17). С. 57–64.

5. *Гаджинский А.М.* Логистика. 12-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Дашков и К., 2005.

6. *Миротин Л.Б., Бульба А.В., Демин В.А.* Логистика, технология, проектирование складов, транспортных узлов и терминалов. Ростов-на-Дону: Изд-во Феникс, 2009.

7. *Журавская М.А., Тарасян В.С., Богданова А.В.* Идентификация и сегментация логистических зон утилизации старых автомобилей на основе теории нечетких множеств//Транспорт Урала. 2010. № 3 (26). С. 11–14.

8. *Башуров В.В., Филимоненкова Т.И.* Математические модели безопасности. Новосибирск: Наука, 2009.

9. *Башуров В.В.* Применение методов геометрической оптики для решения задач безопасности объекта // Вычислит. технологии. 2006. Т. 11. № 4. С. 23–28.

10. *Гельфанд И.А., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961.

11. *Черноруцкий И.Г.* Методы оптимизации и принятия решений: учебное пособие. СПб.: Изд-воЛань , 2001.

12. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.

13. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 3. М.: Эдиториал УРСС, 2004.

14. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.

15. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. С. 50-57.

References

1. Lukynskyi V.S., Lukynskyi V.V., Malevych Yu.V. y dr. Modely y metody teoryy lohystyky. SPb.: Yzd-vo Pyter, 2007. (in Russian)

2. Lohystyka. Pod red. B.A. Anykyna. M.: YNFRA-M, 2001. (in Russian)

3. Eldeshtein Yu.M. Lohystyka: uchebnyk. Krasnoiarsk: Yzd-vo KHAU, 2006. (in Russian)

4. Kazakov A.L., Pospelov A.M. Opredelenye optymalnoho mestonakhozhdenyia bazovoho konteinernoho termynala // Transport Urala. 2008. № 2(17). C. 57–64. (in Russian)

5. Hadzhynskyi A.M. Lohystyka. 12-e yzd., pererab. y dop. M.: Yzd-vo Dashkov y K., 2005. (in Russian)

6. Myrotyn L.B., Bulba A.V., Demyn V.A. Lohystyka, tekhnolohyia, proektyrovanye skladov, transportnыkh uzlov y termynalov. Rostov-na-Donu: Yzd-vo Fenyks, 2009. (in Russian)

7. Zhuravskaia M.A., Tarasian V.S., Bohdanova A.V. Ydentyfykatsyia y sehmentatsyia lohystycheskykh zon utylyzatsyy starыkh avtomobylei na osnove teoryy nechetkykh mnozhestv // Transport Urala. 2010. № 3 (26). S. 11–14. (in Russian)

8. Bashurov V.V., Fylymonenkova T.Y. Matematycheskye modely bezopasnosty. Novosybyrsk: Nauka, 2009. (in Russian)

9. Bashurov V.V. Prymenenye metodov heometrycheskoi optyky dlia reshenyia zadach bezopasnosty obyekta // Vychyslyt. tekhnolohyy. 2006. T. 11. № 4. S. 23–28. (in Russian)

10. Helfand Y.A., Fomyn S.V. Varyatsyonnoe yschyslenye. M.: Nauka, 1961. (in Russian)

11. Chernorutskyi Y.H. Metody optymyzatsyy y pryniatyia reshenyi: uchebnoe posobye. SPb.: Yzd-voLan , 2001. (in Russian)

12. Elsholts L.Э. Varyatsyonnoe yschyslenye. M.: Yzd-vo LKY, 2008.

13. Feinman R., Leiton R., Sends M. Feinmanovskye lektsyy po fyzyke. T. 3. M.: Edytoryal URSS,2004. (in Russian)

14. Sydorov A.F. Yzbrannye trudy: Matematyka. Mekhanyka. M.: Fyzmatlyt, 2001. (in Russian)

15. Kazakov A.L., Lempert A.A. Ob odnom podkhode k reshenyiu zadach optymyzatsyy, voznykaiushchykh v transportnoi lohystyke// Avtomatyka y telemekhanyka. 2011. Vyp. 7. S. 50-57. (in Russian)

Аннотация

Човнюк Юрий Васильевич кандидат технических наук, доцент, Национальный авиационный университет, Киев.

Разумова Екатерина Николаевна доктор экономических наук, профессор, Национальный авиационный университет, Киев.

Чередниченко Петро Петрович доцент, Киевский национальный университет строительства и архитектуры.

Мищенко Елена Дмитриевна старший преподаватель, Киевский национальный университет строительства и архитектуры.

Применение «волнового» метода к решению задач оптимизации перевозок пассажиров и грузов в мегаполисах для усовершенствования их транспортной сети и инфраструктуры.

Концептуальные основы, математическое обеспечение

Предлагается новый подход к решению задач оптимизации, которые возникают в инженерной и транспортной логистике при проектировании и строительстве дорог (в частности, в мегаполисах, вблизи больших транспортных узлов, возле границ государства) для перевозки грузов и пассажиров, для реализации международной торговли. Рассмотрены фундаментальные задачи современной инженерной логистики – задача об оптимальном размещении (транспортных узлов) и задача об идентификации, сегментации логистических, транспортно-логистических зон. Указанные задачи решаются с помощью методов вариационного исчисления, в частности, т.н. «волнового» метода, базирующегося на принципе Ферма, существующем в физической оптике, который, в свою очередь, основан на аналогии между нахождением глобального экстремума интегрального функционала и распространениемсвета в оптически неоднородной среде. Для указанного метода разработан численный алгоритм ПЭВМ.

Идея «волнового» метода/подхода принадлежит В.В. Башурову, который предложил использовать методы геометрической и физической оптики для исследования прикладных задач безопасности и некоторых смежных вопросов. Сущность «волнового» метода состоит в том, что сначала задача безопасности сводится к поиску глобального минимума нелинейного функционала. В свою очередь, задача минимизации решается путём построения траектории движения фронта «световой» волны, который движется в оптически неоднородной среде. Отыскание минимума функционала является классической задачей вариационного исчисления, для решения которой разработан обширный математический аппарат. Однако большинство известных методов эффективно

определяют только локальные экстремумы. «Волновой» метод позволяет эффективно решать задачу нахождения глобального экстремума.

В данной работе предложена концептуальная основа и научно обоснованная модификация данного «волнового» метода для решения задач оптимизации, возникающих в инженерной и транспортной логистике, в том числе задачи об оптимальном размещении транспортного узла, транспортно-логистического центра (склада) и задач оптимальной идентификации, сегментации логистических зон (мегаполисов, больших транспортных узлов).

Ключевые слова: волновой метод; решение задач оптимизации; инженерная/транспортная логистика; вариационное исчисление; принцип Ферма; методы геометрической оптики; мегаполисы; большие транспортные логистические центры; узлы; склады.

Annotation

Chovnyuk Yuriy PhD, Associate professor, National Aviation University, Kyiv.

Razumova Katerina D.Sc. Economics, professor, National Aviation University, Kyiv.

Cherednichenko Petro Associate professor, Kyiv National University of Construction and Architecture.

Mischenko Olena senior lecturer, Kyiv National University of Construction and Architecture.

Application of the ”Wave“ method to solve the problems of optimization of passenger and cargo transportation in megacities to improve their transport network and infrastructure. Conceptual basis, mathematical framework

The paper proposes a new approach to solving optimization problems arising in engineering and transport logistics in designing and construction of roads (in particular, in megacities, near large transport hubs, near state borders) for cargo and passenger transportation and implementation of international trade. The fundamental problems of modern engineering logistics - the problem of optimal location (transport hubs) and the problem of identification and segmentation of logistics, transport and logistics zones are considered. These problems are solved using methods of variational calculus, in particular, the so-called "wave" method based on the Fermat principle existing in physical optics, which is based on the analogy between finding the global extremum of the integral functional and the propagation of light in an optically heterogeneous medium. A numerical method for the above technique has been developed programatically.

The idea of the "wave method/approach belongs to V.V. Bashurov, who proposed to use the methods of geometrical and physical optics to investigate applied safety problems and some related issues. The essence of the "wave method" is that initially the safety problem is reduced to the search for the global minimum of a nonlinear functional. In turn, the minimization problem is solved by constructing the trajectory of motion of the front of the "light wave" moving in an optically inhomogeneous medium.

Finding the minimum of a functional is a classical problem of variational calculus, for the solution of which a significant mathematical apparatus has been developed. However, most of known methods effectively determine only local extrema. "Wave" method allows to solve the problem of finding a global extremum with greater efficiency.

This paper proposes a conceptual framework and scientifically justified modification of this "wave" method for solving optimization problems arising in engineering and transport logistics, including the problem of optimal location of the transport hub, transport and logistics center (warehouse) and the problem of optimal identification and segmentation of logistical zones (metropolitan areas, large transport hubs).

Keywords: wave method; solving optimization problems; engineering/transport logistics; variational calculus; Fermat's principle; methods of planar optics; megacities; large transport and logistics centers; hubs; warehouses.