DOI: https://doi.org/10.32347/2077-3455.2021.60.277–296
УДК 624.014.25(07)
Човнюк Юрій Васильович,
к.т.н., професор
Національний університет біоресурсів і природокористування України
ychovnyuk@ukr.net
http://orcid.org/0000-0002-0608-0203
Чередніченко Петро Петрович,
доцент, Київський Національний університет будівництва і архітектури,
petro_che@ukr.net
https://orcid.org/0000-0001-7161-661X
Кравчук Володимир Тимофійович,
к.т.н., доцент, Київський Національний університет будівництва і архітектури
vtk1@ukr.net
http://orcid.org/0000-0002-5213-3644
Остапущенко Ольга Павлівна,
к.т.н., доцент, Київський Національний університет будівництва і архітектури
olga_ost_17@ukr.net
http://orcid.org/0000-0001-8114-349X
Іванов Євгеній Олександрович,
Національний авіаційний університет, м. Київ, Україна
shifango@ukr.net
http://orcid.org/0000-0002-1318-0472

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ ДЕФОРМОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ (ЕЛЕМЕНТІВ МЕТАЛОКОНСТРУКЦІЙ БУДІВЕЛЬ) ПРИ ЇХ ЛАЗЕРНІЙ ОБРОБЦІ КОРОТКИМИ ХВИЛЬОВИМИ ІМПУЛЬСАМИ

Анотація: обгрунтована математична модель для аналізу нестаціонарних термопружних полів деформованих середовищ (елементів металоконструкцій будівель) при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами. Отримані точні аналітичні розв’язки рівнянь теплопровідності, які моделюють взаємодію коротких лазерних імпульсів й дозволяють у подальшому визначати компоненти термонапружено-деформованого стану оброблюваних матеріалів, зокрема, тонких плівок пористих, капілярно-пористих тіл. У якості методу аналізу використані два: 1) традиційний метод розділення змінних (метод Фур’є); 2) нефур’є-аналіз нестаціонарних теплових полів, що описуються відомим у літературі телеграфним рівнянням. Отримані результати можуть у подальшому бути використані для встановлення параметрів термонапружено-деформованого стану матеріалів що використовуються у елементах

металоконструкцій будівель при їх взаємодії з короткими хвильовими імпульсами лазерного випромінювання. Лазерна обробка матеріалів призводить до підвищення міцності і надійності як елементів металоконструкцій будівель, так і використовуваних у сучасному будівництві капілярно-пористих матеріалів, вкритих тонкою (нано-) плівкою.

Ключові слова: моделювання; аналіз; нестаціонарність; температурні поля; деформовані середовища; елементи металоконструкцій будівель; капілярно-пористі тіла; наноплівки; лазерне випромінювання; короткі хвильові імпульси.

Постановка проблеми. Нестаціонарні теплові поля у деформованих середовищах (тілах), зокрема, у елементах металоконструкцій будівель, композиційних матеріалах, капілярно-пористих тілах, вкритих металевими наноплівками, можуть формуватись при впливі на ці середовища коротких хвильових імпульсів (наприклад, при їх лазерній обробці). Тенденція до формування теплових/термопружних відеоімпульсів (ТВІ) є характерною останнім часом для фемтосекундної оптики ($\tau \approx 10^{-15}$ с), де ультракороткі імпульси, що виходять з оптичного компресора й взаємодіють з твердотільною мішенню, містять у собі 3-5 коливань електромагнітотермов’язкопружного поля. Крім того, аналогічна тенденція помітна і в оптиці, що зароджується, а саме у металооптиці аттосекундних сигналів (тривалістю $\tau \approx 10^{-18}$ с), взаємодіючих з деформованим тілом, середовищем, оброблюваною плівкою або композиційним матеріалом.

Традиційні розв’язки рівнянь теплопровідності/термопружності у суцільних середовищах пов’язані з представленням розв’язків у вигляді добутку функцій, залежних чи від координат, чи від часу (т.з. розділені розв’язки). При цьому для ряду моделей (лінійних) деформованих тіл рівняння руху перетворюються на хвильові рівняння. У випадку усталених рухів (у т.ч. “високочастотних”) розв’язок задач зводиться до розв’язку рівняння Гельмгольца (скалярного/векторного). Часова залежність зазвичай досліджується за допомогою перетворення Фур’є. Багато десятиліть саме такий підхід формував мову опису квазімонохроматичних хвиль у квазі- та металооптиці, акустиці, радіофізиці, механіці деформованого твердого тіла, матеріалознавстві. Проте спроби застосувати цей же підхід у динаміці взаємодії коротких відеоімпульсів (наприклад, електромагнітної природи) з деформованими середовищами, композиційними матеріалами (з наступною генерацією у останніх термопружних, теплових імпульсів, зв’язаних полів надкороткої тривалості (τ)) зіштовхнулись з неочікуваними труднощами як концептуальними, так і обчислювальними.

Слід підкресліти, що зазначені труднощі пов’язані не з рівняннями руху деформованих середовищ (тіл), а з традиційним методом їх розв’язку за допомогою розділення змінних і перетворення Фур’є. Однак подання теплових та термопружних полів за допомогою цього методу є не наслідком цих рівнянь руху, а лише одним (традиційним) зі способів їх розв’язку. Цей спосіб зручний для опису квазімонохроматичних хвиль у деформованих середовищах, тілах й композиційних матеріалах з повільно змінними амплітудою та фазою, але є малоефективним для аналізу нестаціонарних і негармонічних зв’язаних полів різної фізичної природи (у т.ч. теплових, термопружних) у вказаних об’єктах дослідження.

Отримати інформацію про такі поля можна у межах методу, розвинутого автором роботи [8], і використаного у [9]. Слід зазначити, що отримання таких розв’язків здійснюється без використання стандартного розділення змінних й поза технологією фур’є-розкладів. Такі “нероздільні” точні аналітичні розв’язки, що не зв’язані традиційними припущеннями про малість або повільність зміни теплових/термопружних полів, утворюють математичну основу опису швидкозмінних неперіодичних полів (різної фізичної природи) й коротких імпульсів, що використовуються при лазерній обробці різноманітних матеріалів. Саме середовище при цьому вважається нерухомим й стаціонарним, а нестаціонарність просторово-часової структури зв’язаного поля, яке розповсюджується, обумовлена значними змінами його огинаючої за характерний час, що визначається мікроскопічними процесами встановлення поля (цієї фізичної природи) у деформованому середовищі, композиційному матеріалі, капілярно-пористому тілі (наприклад, час температурної релаксації).

Розвиток комп'ютерних методів у сполученні з технічним прогрессом у обчислювальній техніці в останні десятиріччя значно спростили розв’язок багатьох математичних задач. Для аналізу математичних моделей фізичних процесів широко застосовуються комп’ютерні методи. Однак для глибокого розуміння фізичних явищ, які відбуваються, та їх відповідного пояснення часто необхідно отримати й дослідити аналітичні розв’язки. Саме для цього використовується весь апарат математичної фізики.

У даному дослідженні отримані точні аналітичні розв’язки (методом Фур’є) рівняння Гюера-Крумхансля, яке адекватно (у одновимірному наближенні) описує процеси розповсюдження теплових хвиль у структурах малої розмірності (надтонкі плівки, наноутворення з графену, карбонові нанотрубки, силіконові волокна та ін.), у макроскопічних тривимірних об’єктах зі значною внутрішньою неоднорідністю, при дослідженні розповсюдження коротких імпульсів тепла за нормальної температури у пористих (капілярно-пористих) матеріалах, вкритих металевими наноплівками.

Таким чином, отримання вище зазначених розв'язків наведених рівнянь представляє актуальну задачу із множиною практичних застосувань.

Аналіз останніх публікацій по темі дослідження. Використання класичних підходів та методів математичної фізики, викладених у роботах [1-7], а також нестандартного підходу робіт [8,9], дозволило обгрунтувати коректність знаходження як розв'язків класичного рівняння Гельмгольца [1,2], так і нероздільних розв'язків гіперболічного рівняння теплопровідності/телеграфного рівняння. У роботах [10-35] обгрунтовані підходи до аналітичного розв'язування рівняння Гюера-Крумхансля. У даному дослідженні знайдені розв'язки цього рівняння, отримані методом Фур'є.

Мета даної роботи є обгрунтування методів знаходження й дослідження нових точних розв'язків рівнянь гіперболічної теплопроводності, Гюера-Крумхансля та Гельмгольца за допомогою класичного підходу (методу Фур'є) та нефур'є-аналізу, що адекватно описують процес перенесення тепла при взаємодії оброблюваного середовища (тіла, матеріалу) з короткими хвильовими імпульсами лазерного опромінювання, тривалість котрих лежить у межах $\tau \approx \left(10^{-9}...10^{-15}\right)$с.

Виклад основного змісту дослідження.

1.Використання методу Фур'є для знаходження розв'язку рівняння Гельмгольца.

У циліндричній системі координат (r, φ, z) рівняння теплопровідності має вигляд рівняння Гельмгольца [1]:

$$\left(\tau_{pT} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t}\right) = a \cdot \nabla^2 T,\ \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

де $\tau_{p\text{T}}$ − час температурной релаксації, T − температура, t − час, a − коефіцієнт температуропровідності, ∇^2 − оператор Лапласа.

Зазначимо, що рівняння (1) враховує другу похідну по часу t від температури матеріалу T, тому має назву гіперболічного рівняння теплопровідності (яке, до речі, відповідає скінченній швидкості розповсюдження теплової хвилі T у матеріалі). Саме цей вид рівняння теплопровідності обраний тому, що у подальшому у матеріалі будуть розглядатись нестаціонарні температурні поля, що виникають внаслідок взаємодії середовища, що обробляється, з короткими (тривалістю $\tau_0 = \left(10^{-9}...10^{-12}\right)$с) лазерними імпульсами. Використання для цього випадку класичного параболічного рівняння теплопровідності (з $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} \equiv 0$) є некоректним.

Подамо розв'язок (1) згідно методу розділення змінних (методу Фур'є) у вигляді :

$$T(r,\varphi,z,t)=U(r,\varphi,z)\cdot V(t). \quad (2)$$

Використовуючи підхід робіт [1-6] і підставляючи (2) у (1), можна звести знаходження розв'язку $T(r,\varphi,z,t)$ до двох рівнянь:

$$\begin{cases} a\cdot\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right\}+\frac{a}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+a\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2\cdot U=0; \\ \tau_{p\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial V}{\partial t}+k^2\cdot V=0, \end{cases} \quad (3)$$

де $k^2>0$ − константа розділення змінних, або ж із урахуванням залежностей U й V у (2) до системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{k^2}{a}\cdot U=0; \\ \tau_{p\mathrm{T}}\cdot\frac{d^2 V}{dt^2}+\frac{dV}{dt}+\frac{k^2}{a}\cdot V=0. \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язок першого рівняння системи (4) шукаємо у вигляді:

$$U=U_1(r)\cdot U_2(\varphi)\cdot U_3(z). \quad (5)$$

Тоді перше рівняння системи (4) набирає виду:

$$\frac{1}{u_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du_1}{dr}\right)+\frac{1}{u_2}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2u_2}{d\varphi^2}+\frac{1}{u_3}\cdot\frac{d^2u_3}{dz^2}+\frac{k^2}{a}=0. \quad (6)$$

Враховуючи ту обставину, що останні два члени (6) є функціями тільки координати z, можна записати замість (6):

$$\frac{1}{u_3}\cdot\frac{d^2u_3}{dz^2}+\frac{k^2}{a}=\mu^2;\ \frac{1}{u_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du_1}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\cdot u_2}\cdot\frac{d^2u_2}{d\varphi^2}=-\mu^2, \quad (7)$$

де $\mu^2>0$ − константа розділення змінних. Після домноження другого рівняння (7) на r^2 і врахування тієї обставини, що останній член зліва рівняння (7) залежить лише від φ, замість останнього рівняння (7) матимемо:

$$\frac{r}{u_1}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du_1}{dr}\right)+r^2\cdot\mu^2=\lambda^2;\ \frac{1}{u_2}\cdot\frac{d^2u_2}{d\varphi^2}=-\lambda^2, \tag{8}$$

де $\lambda^2>0$ – константа розділення змінних (r та φ).

Таким чином, остаточно отримаємо для знаходження функцій $u_1(r)$, $u_2(\varphi)$ й $u_3(z)$ три рівняння:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du_1}{dr}\right)+\left(\mu^2-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)\cdot u_1=0;\ \frac{d^2u_2}{d\varphi^2}+\lambda^2\cdot u_2=0; \\ \frac{d^2u_3}{dz^2}-\left(\mu^2-\frac{k^2}{a}\right)\cdot u_3=0. \end{cases} \tag{9}$$

Розв’язок кожного з рівнянь системи (9) знаходимо, враховуючи певні граничні умови задачі. Так, для першого рівняння (9) використаємо умову:

$$\alpha\cdot\frac{du_1}{dr}+\beta\cdot u_1=\beta\cdot u_{10},\quad \text{при } r=r_0, \tag{10}$$

де α – коефіцієнт теплопровідності матеріалу, β – коефіцієнт тепловідводу матеріалу, $u_{10}\equiv T_0$ – температура оточуючого матеріал середовища, з яким відбувається теплообмін (причому середовище має температуру T_0).

Теплообмін відбувається за законом Ньютона, а T_0 – як початковий рівень відліку температури T приймаємо за умовний нуль, тобто $u_{10}\equiv T_0=0$. У (10) r_0 – характерний розмір пластини/об’єкту, у якому розглядається процес теплопровідності. Зазначимо, що для прямокутної пластини довжиною $\overline{a}$ й шириною $\overline{b}$ еквівалентний радіус r_0 можна визначити зі співвідношення:

$$r_0=\sqrt{\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\pi}}\,. \tag{11}$$

Тоді розв’язок першого рівняння системи (9) можна подати у вигляді функції Бесселя n-го порядку виду:

$$u_1(r)=I_n(\mu r). \tag{12}$$

При цьому константи μ знаходимо з трансцедентного рівняння:

$$\alpha\cdot\mu\cdot I_n'(\mu r_0)+\beta\cdot I_n(\mu r_0)=0. \tag{13}$$

Зрозуміло, що таких коренів (13) для μ буде нескінченно багато, тому індексом $m=1,2,3...$ ми пронумеруємо ці корені μ_{mn} у порядку їх зростання по величині, тобто: $\mu_{1n}, \mu_{2n}, \mu_{3n}, ..., \mu_{mn}, ...$.

Для другого рівняння системи (9), яке визначає $u_2(\varphi)$, зазначимо, що по φ функція $u_2(\varphi)$ повинна бути однозначною, неперервною й мати період 2π. Це означає, що $\lambda^2 = n^2$, $n=1,2,3...$ і співпадає з порядком функції Бесселя для $u_1(r)$. Тоді загальний вид власних функцій $u_1(r)$ та $u_2(\varphi)$ наступний:

$$\begin{cases} u_1(r) \equiv u_{1mn}(r) = I_n(\mu_{mn} \cdot r),\ m=1,2,3,...;\ n=1,2,3,...; \\ u_2(\varphi) = \cos(n\varphi + \psi_n),\ u_2(\varphi) \equiv u_{2n}(\varphi), \end{cases} \quad (14)$$

де ψ_n – довільна стала.

Тоді для рівняння, що визначає функцію $u_3(z)$, маємо:

$$\frac{d^2u_3}{dz^2} + \left(\frac{k^2}{a} - \mu_{mn}^2\right) \cdot u_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u_3}{dz^2} + \nu_{mn}^2 \cdot u_3 = 0, \quad (15)$$

де $\nu_{mn} = \left\{\frac{k^2}{a} - \mu_{mn}\right\}^{1/2}$.

Розв’язок рівняння (15) шукаємо при наступних граничних умовах [7]:

$$-\lambda_0 \cdot \left(\frac{du_3}{dz}\right) = -\alpha_1 \cdot u_3 \text{ при } z=0;\ \lambda_0 \cdot \left(\frac{du_3}{dz}\right) = -\alpha_2 \cdot u_3 \text{ при } z=\delta, \quad (16)$$

де: δ – товщина пластини матеріалу; λ_0 – коефіцієнт теплопровідності матеріалу при ($t=0$); $\alpha_{1,2}$ – коефіцієнт тепловіддачі/тепловідводу для поверхні пластини $z=0$ й $z=\delta$, відповідно. Власні значення ν_{mnl}, $l=1,2,3,...$ знаходимо з трансцедентного рівняння:

$$ctg(\nu_{mnl} \cdot \delta) = \frac{\nu_{mnl}^2 - \alpha_1\alpha_2/\lambda_0^2}{\nu_{mnl} \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda_0}. \quad (17)$$

Для функції u_{3l} маємо:

$$u_{3mnl}(z)=\frac{(\nu_{mnl}\delta)\cos(\nu_{mnl}z)+\frac{\alpha_1}{\lambda_0}\delta\sin(\nu_{mnl}z)}{\left\{\left[\frac{\delta}{2}\right]\left[(\nu_{mnl}\delta)^2+\left(\frac{\alpha_1\delta}{\lambda_0}\right)^2+\frac{\left[(\nu_{mnl}\delta)^2-\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_0}\delta\right)^2\right]}{\nu_{mnl}\delta}\sin(\nu_{mnl}\delta)\cos(\nu_{mnl}\delta)+2\frac{\alpha_1\delta}{\lambda_0}\sin^2(\nu_{mnl}\delta)\right]\right\}^{1/2}}. \tag{18}$$

Отже, остаточно для $u_{lmn}(r,\varphi,z)$ маємо:

$$\begin{aligned}&u_{lmn}(r,\varphi,z)=C_{lmn}\cdot I_n(\mu_{mn}\cdot r)\cdot\cos(n\varphi+\psi_n)\cdot u_{3mnl}(z)\\&(m,n,l)=1,2,3,...\end{aligned}, \tag{19}$$

У подальшому розглядатимемо теплопровідність матеріалу для випадку кругової симетрії (по φ), тобто $n\equiv 0$. При цьому вираз для $u_{lmn}(r,\varphi,z)$ спрощується:

$$u_{lm}(r,z)=C_{lm}\cdot I_0(\mu_m\cdot r)\cdot u_{3ml}(z),\ \nu_{mnl}\equiv\nu_{ml},\ (m,l)=1,2,..., \tag{20}$$

де C_{lm} – константи.

Тепер розглядатимемо рівняння для $V(t)$, яке має наступний вигляд:

$$\tau_{p\mathrm{T}}\cdot\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{dV}{dt}+\frac{k^2}{a}\cdot V=0. \tag{21}$$

Розв'язок (21) можна подати наступним чином:

$$V(t)=\bar{C}_1\cdot\exp(\bar{\lambda}_1\cdot t)+\bar{C}_2\cdot\exp(\bar{\lambda}_2\cdot t), \tag{22}$$

де:

$\bar{\lambda}_{1,2}=-\dfrac{1}{2\tau_{pT}}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4\tau_{pT}^2}-\dfrac{k^2}{a\cdot\tau_{pT}}}$. Покладемо: $\bar{\Omega}=\sqrt{\dfrac{k^2}{a\cdot\tau_{pT}}-\dfrac{1}{4\tau_{pT}^2}}$.

Тоді: $\bar{\lambda}_{1,2}=-\dfrac{1}{2\tau_{pT}}\pm i\cdot\bar{\Omega},\ i^2=-1$. Остаточно для $V(t)$ маємо:

$$V(t)=\left(\bar{C}_1\cdot\cos\bar{\Omega}t+\bar{C}_2\cdot\sin\bar{\Omega}t\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\tau_{pT}}\cdot t\right), \tag{23}$$

де $\bar{C}_1$ й $\bar{C}_2$ − константи, що визначаються з початкових умов задачі. Остаточно для $T(r,\varphi,z,t)$ маємо:

$$T(r,\varphi,z,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\bar{C}_{1lm}\cos\bar{\Omega}t+\bar{C}_{2lm}\sin\bar{\Omega}t\right\}\exp\left(-\frac{1}{2\tau_{pT}}t\right)I_0(\mu_m r)u_{3ml}(z). \quad (24)$$

Початкові умови для визначення констант $\bar{C}_{1lm}$ й $\bar{C}_{2lm}$ мають наступний вид:

$$T(r,\varphi,z,t)\Big|_{t=0;r=0;z=0}=\tilde{T}_0(0;0;0);\ \left.\frac{\partial T(r,\varphi,z,t)}{\partial t}\right|_{t=0;r=0;z=0}=\dot{\tilde{T}}_0(0;0;0). \quad (25)$$

Можливий й такий варіант граничних/початкових умов для визначення констант $\bar{C}_{1lm}$ й $\bar{C}_{2lm}$:

$$T(r,\varphi,z,t)\Big|_{t=0;r=0;z=0}=\tilde{T}_0(0;0;0);\ T(r,\varphi,z,t)\Big|_{t=0;r=0;z=\delta}=\tilde{T}_\delta(0,\delta,0). \quad (26)$$

2. Нефур’є-аналіз процесу теплопровідності у тонких плівках матеріалів

Розглянемо далі рівняння теплопровідності для тонких плівок ($\delta << r_0$), взаємодіючих з короткими хвильовими лазерними імпульсами. У цьому випадку нас буде цікавити лише залежність $T(z,t)$. Це дає змогу подати вихідне рівняння теплопровідності у вигляді наступного:

$$\left(\tau_{pT}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}\right)=a\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (27)$$

Зазначимо, що у цьому випадку тривалість самого лазерного імпульсу складає $\tau_0=\left(10^{-12}...10^{-9}\right)$ с. Зрозуміло, що фур’є-аналіз для таких коротких хвильових імпульсів недоцільний! Тому використаємо підхід роботи [8]. Аналіз нестаціонарних термопружних полів у диспергуючих, дисипативних деформованих середовищах (тілах) та композиційних матеріалах при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами здійснений у роботі [9].

Подамо рівняння (27) у більш зручному для подальшого нефур’є-аналізу виді:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{\tau_{pT}}{a}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}. \quad (28)$$

Введемо характерний час встановлення у плівці температурного поля:

$$\tau_{характ.}=\frac{2a}{\tilde{c}^2},\ \tilde{c}^2=\frac{a}{\tau_{pT}},\tag{29}$$

де $\tilde{c}=\sqrt{\dfrac{a}{\tau_{pT}}}$ − швидкість розповсюдження температурного поля уподовж осі $0z$ плівки матеріалу. Фактично з (29) випливає, що $\tau_{характ.}=2\tau_{pT}$.

Зрозуміло, що можна подати традиційний розв'язок рівняння (28), який описує затухаючі синусоїдальні хвилі, котрі характеризуються комплексним хвильовим числом $\tilde{K}$:

$$\tilde{K}=\frac{\omega}{\tilde{c}}\cdot\sqrt{1+2i\left(\omega\cdot\tau_{характ.}\right)^{-1}},\ i^2=-1,\tag{30}$$

ω − характерна кругова частота короткого теплового імпульсу.

Поряд з розв'язком (30) й розв'язком, що представлений у вигляді інтегралів по траєкторіям (по Р. Фейнману), рівняння (28) можна переписати у безрозмінних змінних:

$$T=\tilde{T}_A\cdot f,\ \tilde{\tau}=t\cdot\tau_{характ.}{}^{-1},\ \tilde{\eta}=z\cdot\left(\tilde{c}\cdot\tau_{характ.}\right)^{-1},\tag{31}$$

й отримати:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\tilde{\eta}^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial\tilde{\tau}^2}=2\frac{\partial f}{\partial\tilde{\tau}}.\tag{32}$$

Точні аналітичні розв'язки безрозмірного телеграфного рівняння (32), що описує температурне поле $T\left(z,t\right)$ у тонких плівках матеріалів, взаємодіючих з короткими хвильовими лазерними імпульсами, і є, по суті, неперіодичними змінними у часі й просторі температурними полями, представляються у формі [8]:

$$f=\sum_{q=1}^{\infty}a_q\cdot\overline{f}_q,\tag{33}$$

$$\overline{f}_q=\frac{1}{2}\left(\theta_{q-1}+\theta_{q+1}-2\theta_q\right)=\frac{\partial\theta_q}{\partial\tilde{\tau}},\tag{34}$$

$$\theta_q\left(\tilde{\tau},\tilde{\eta}\right)=\exp\left(-\tilde{\tau}\right)\cdot\left(\frac{\tilde{\tau}-\tilde{\eta}}{\tilde{\tau}+\tilde{\eta}}\right)^{q/2}\cdot I_q\left(\sqrt{\tilde{\tau}^2-\tilde{\eta}^2}\right),\ \tilde{\tau}>>\eta.\tag{35}$$

Тут $I_q\left(\tilde{\tau},\tilde{\eta}\right)$ − модифікована функція Бесселя; індекс q визначається з граничних умов на поверхні деформованого середовища (плівки матеріалу) $\tilde{\eta}=0$.

Характерні властивості нероздільних функцій (33), що описують температурні поля у деформованих середовищах (тонких плівках (композиційних) матеріалів тощо), зводяться до наступних:

1) $\theta_q\left(\tilde{\tau},\tilde{\eta}\right)\Big|_{\tilde{\tau}=\tilde{\eta}}=0\ \left(q>0\right);$ (36)

2)використовуючи відому асимптотику функцій:

$$I_q\left(\bar{u}\right)-I_q\left(\bar{u}\right)\Big|_{\bar{u}>>1}=\frac{\exp\left(-\bar{u}\right)}{\sqrt{2\pi\bar{u}}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2\pi\right)^n}\cdot\frac{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}-n\right)}, \tag{37}$$

де Γ − гамма-функція, можна знайти закон спадання температурного поля $\bar{f}_q$ (34) у будь-якому перерізі при $\bar{\tau} >> \bar{\eta}$:

$$\bar{f}_q\Big|_{\tilde{\tau}>>\tilde{\eta}}=-\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)\cdot\left(\tilde{\tau}\right)^{-3}. \tag{38}$$

У таблиці наведені значення функції $\bar{f}_q\left(\tilde{\tau}\right)$ (34), яка характеризує закон спадання теплового поля у будь-якому перерізі тонкої плівки матеріалу при її лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами $\left(\tilde{\tau}>>\tilde{\eta}\right)$.

Суттєвим є також і те, що нестаціонарні теплові/температурні поля у деформованих середовищах (тілах) й композиційних матеріалах, у тонких плівках подібних матеріалів характеризуються природним масштабом часу $\tau_{характ.}$ (29) (з котрим, до речі, можна зв’язати й характерний “масштаб” частот: $\omega_{характ.} \sim \tau_{характ.}^{-1}$), граючи при цьому провідну роль у процесах імпульсного збудження зв’язаних полів у тонких плівках матеріалів (у т.ч. у наноплівках).

Таблиця 1.

Залежність $\overline{f}_q(\tilde{\tau})$ (38)

$\tilde{\tau}$	$-\overline{f}_q$
0,1	200
0,2	25
0,3	7,4
0,5	1,6
0,8	0,4
1	0,2
10	$2\cdot10^{-4}$
20	$2{,}5\cdot10^{-5}$
30	$7{,}4\cdot10^{-6}$
40	$3{,}1\cdot10^{-6}$
50	$1{,}6\cdot10^{-6}$
100	$2{,}0\cdot10^{-7}$

3.Аналіз розв'язків рівняння типу Гюера-Крумхансля.

У роботі [10] наведені розв'язки гіперболічного рівняння теплопровідності та рівняння типу Гюера-Крумхансля, котре адекватно описує теплопровідність у макроскопічних тривимірних об'єктах зі значною внутрішньою неоднорідністю, у тонких плівках матеріалів, при дослідженні розповсюдження коротких імпульсів тепла за нормальної температури у капілярно-пористих матеріалах. Автор [10] знайшов точні розв'язки вказаних рівнянь операторним методом [11-13].

У даному дослідженні знайдений точний аналітичний розв'язок рівняння Гюера-Крумхансля, отриманий за допомогою методу розділення змінних (Фур'є) для одновимірного випадку:

$$\tau_{pT}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}=a\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+k_b\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial z^2\partial t}, \tag{39}$$

де k_b – коефіцієнт, що описує теплопровідність балістичного типу, яка доповнює дифузію тепла Фур'є

$$\sim a\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

й розповсюдження теплових хвиль ще однією компонентою перенесення тепла, котра діє на масштабах L (товщина плівки), що є однією по порядку величиною у порівнянні з середньою довжиною вільного пробігу фононів $\tilde{l}$ [14,15], тобто $L\sim\tilde{l}$. Дійсно, класичні теорії Фур'є [16] та Казіміра [17] недостатні для опису переносу тепла, котрий залежить не тільки від зіштовхувань між фононами, але й від взаємодії фононів на границі середовища. Ці, так звані балістичні умови, коли довжина вільного пробігу фононів ($\tilde{l}$) одного порядку з розміром системи, реально спостерігаються у структурах малої розмірності, таких як: надтонкі плівки, наноутворення на основі графена, карбонові нанотрубки, силіконові волокна та ін. [18-22]. Розуміння того, чи визначається перенесення тепла балістичними умовами чи ні, у кожному конкретному випадку є важливим з практичної точки зору, оскільки балістична фононна теплопередача вимагає оцінки умов на границі середовища й залежить від них, а не тільки від самого середовища [15, 21, 23].

Дослідження, проведені у [24-30], підтверджують, що теплопередача у різко неоднорідних середовищах при кімнатній температурі не описується законами Фур'є [16] й Каттанео (т.з. гіперболічне рівняння теплопровідності) [31], а, скоріше за все, моделюється рівняннями типу Гюера-Крумхансля [24, 32-34], незважаючи на те , що балістичні умови ($\tilde{l} \approx L$), власне, відсутні, крім того, схожі результати були отримані при дослідженні розповсюдження коротких імпульсів тепла за нормальної температури у різноманітних пористих матеріалах. Подібні результати потім розглядались й у більш загальному контексті у [35].

Таким чином, отримання розв'язків та дослідження рівняння Гюера-Крумхансля представляє актуальну задачу з множиною практичних застосувань.

Будемо розшукувати розв'язок рівняння (39) у вигляді:

$$T(z,t) = \bar{U}(z)\cdot\bar{V}(t). \qquad (40)$$

Після підстановки (40) у (39) можна отримати:

$$\frac{\left(\tau_{pT}\cdot\ddot{\bar{V}}+\dot{\bar{V}}\right)}{\left(a\cdot\bar{V}+k_b\cdot\dot{\bar{V}}\right)} = \frac{\bar{U}''}{\bar{U}} = -\bar{k}^2,\ \bar{k}^2>0,\ \bar{k}^2=const\,, \qquad (41)$$

де k^2 – константа розділення змінних; крапка над функцією $\bar{V}$ означає однократне диференціювання по часу t, а штрих біля функції $\bar{U}$ означає однократне диференціювання по координаті z.

В результаті маємо для $\bar{U}(z)$ наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\bar{U}}{dt^2}+\bar{k}^2\cdot\bar{U}=0, \qquad (42)$$

а для функції $\bar{V}(t)$:

$$\tau_{pT}\cdot\ddot{\bar{V}}+\dot{\bar{V}}\left(1+\bar{k}^2\cdot k_b\right)+\bar{k}^2\cdot a\cdot\bar{V}=0, \qquad (43)$$

або:

$$\tau_{pT}\cdot\frac{d^2\bar{V}}{dt^2}+\frac{d\bar{V}}{dt}\left(1+\bar{k}^2\cdot k_b\right)+\bar{k}^2\cdot a\cdot\bar{V}=0\,. \tag{44}$$

Розв'язок (42) за граничних умов типу (16) при товщині пластини/плівки $\delta\equiv L$ дає наступне трансцедентне рівняння для визначення $\bar{k}_n$:

$$ctg\left(\bar{k}_n\cdot\delta\right)=\frac{\bar{k}_n^2-\alpha_1\alpha_2/\lambda_0^2}{\bar{k}_n\cdot\left(\alpha_1+\alpha_2\right)/\lambda_0},\; n=1,2,\ldots\,. \tag{45}$$

Вираз для функції $\bar{U}_n\left(z\right)$ набуває наступного вигляду:

$$\bar{U}_n\left(z\right)=$$

$$=\frac{\left(\bar{k}_n\delta\right)\cos\left(\bar{k}_n z\right)+\frac{\alpha_1}{\lambda_0}\delta\sin\left(\bar{k}_n z\right)}{\left\{\frac{\delta}{2}\left[\left(\bar{k}_n\delta\right)^2+\left(\frac{\alpha_1\delta}{\lambda_0}\right)^2+\frac{\left[\left(\bar{k}_n\delta\right)^2-\left(\frac{\alpha_1\delta}{\lambda_0}\right)^2\right]}{\bar{k}_n\delta}\sin\left(\bar{k}_n\delta\right)\cos\left(\bar{k}_n\delta\right)+2\frac{\alpha_1\delta}{\lambda_0}\sin^2\left(\bar{k}_n\delta\right)\right]\right\}^{1/2}}. \tag{46}$$

Розв'язок рівняння (43) за визначеного $\bar{k}_n$ (45) розшукуємо у наступному вигляді:

$$\bar{V}_n\left(t\right)=\exp\left\{-\frac{t}{\tau_n^*}\right\}\cdot\left\{C_n\sin\left(\Omega_n t\right)+D_n\cos\left(\Omega_n t\right)\right\}, \tag{47}$$

де:

$$\tau_n^*=\frac{2\tau_{pT}}{\left(1+\bar{k}_n^2\cdot k_b\right)};\; \Omega_n=\left\{\frac{\bar{k}_n^2\cdot a}{\tau_{pT}}-\frac{\left(1+\bar{k}_n^2\cdot k_b\right)^2}{4\tau_{pT}^2}\right\}^{1/2},\left(C_n,D_n\right)=const\,.$$

Введемо позначення:

$$A_{n1}=\left(\bar{k}_n\cdot\delta\right);\; A_{n2}=\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_0}\cdot\delta\right); \tag{48}$$

знаменник виразу (46) позначимо як $\overline{B}_n$. Тоді загальний розв'язок (40) рівняння (39) можна подати наступним чином:

$$T(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{t}{\tau_n^*}\right\}\cdot\left\{C_{1n}\cdot A_{n1}\cdot\cos\left(\overline{k}_n\cdot z\right)\cdot\cos\left(\Omega_n\cdot t\right)+\right.$$
$$+C_{2n}\cdot A_{n1}\cdot\cos\left(\overline{k}_n\cdot z\right)\cdot\sin\left(\Omega_n\cdot t\right)+C_{3n}\cdot A_{n2}\cdot\sin\left(\overline{k}_n\cdot z\right)\cdot\cos\left(\Omega_n\cdot t\right)+ \quad (49)$$
$$\left.+C_{4n}\cdot A_{n2}\cdot\sin\left(\overline{k}_n\cdot z\right)\cdot\sin\left(\Omega_n\cdot t\right)\right\}\cdot\left(B_n\right)^{-1}.$$

Константи $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$ можна знайти з початкових умов задачі:

$$\begin{cases} T(z,t)\Big|_{z=0;t=0}=T(0,0);\ \left.\dfrac{\partial T(z,t)}{\partial t}\right|_{z=0;t=0}=\dot{T}(0,0); \\ T(z,t)\Big|_{z=\delta;t=0}=T(\delta,0);\ \left.\dfrac{\partial T(z,t)}{\partial t}\right|_{z=\delta;t=0}=\dot{T}(\delta,0). \end{cases} \quad (50)$$

Висновки

1. Обгрунтована математична модель для аналізу нестаціонарних термопружних полів деформованих середовищ, елементів металоконструкцій будівель, капілярно-пористих тіл, вкритих тонкою металевою наноплівкою при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами задля підвищення міцності та надійності таких матеріалів, що використовуються у сучасному будівництві.

2. Отримані точні аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца та рівняння типу Гюера-Крумхансля. Останнє адекватно описує процеси розповсюдження теплових хвиль у тонких плівках матеріалів, у капілярно-пористих тілах. Розв'язки вказаних рівнянь отримані класичним методом розділення змінних (методом Фур'є). Для гіперболічного рівняння теплопровідності (у одновимірній постановці задачі) отримані розв'язки нефур'є-методом, котрі є нестаціонарними, неперіодичними й адекватно описують взаємодію ультракоротких ($\tau=10^{-12}\dots10^{-9}$с) імпульсів лазерного випромінювання з оброблюваним середовищем, у котрому у подальшому розповсюджуються теплові нестаціонарні імпульси.

3. Результати даного дослідження можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення існуючих методів аналізу процесів розповсюдження тепла у матеріалах, котрі взаємодіють з короткими хвильовими імпульсами лазерного випромінювання, задля підвищення їх

міцності, надійності й термінів довготривалої експлуатації у сучасному будівництві.

Список літератури

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

2. Мусій Р.С., Орищин О.Г., Зашкільняк І.М., Клайчук М.І. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики. Львів: Растр-7, 2018. 250 с.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

4. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968.

5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.М.-Л.: Наука, 1950.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

7. Недосека А.Я. Основы расчета сварных конструкций. К.: Вища школа. Головное изд-во, 1988. 263 с.

8. Шварцбург А.Б. Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах. Успехи физических наук. 1998. Т.168. №2. С. 85-103.

9. Човнюк Ю.В. Нестационарные термоупругие поля в диспергирующих, диссипативних деформируемых средах (телах) и композиционных материалах при их лазерной обработке короткими волновыми импульсами. Вісник Черкаського інженерно-технологічного інституту. 2001. №4. С. 58-65.

10. Жуковский К.В. Точное решение гиперболического уравнения теплопроводности и уравнения типа Гюера-Крумхансля. Ученые записки физического факультета Московского университета. 2017. №4. С. 1740301-1 − 1740301-16.

11. Dattoli G., Srivastava H.M., Zhumkovsky K.V. Apple. Math. Comput. 2007. V.184. P. 979.

12. Zhukovsky K. Sci. World J. 2014. Article ID 454865. P.1.

13. Zhukovsky K.V. Mosc. Univ. Phys. Bull. 2015. V.70. №2. P.93.

14. Lebon G., Machrafi H., Gremela M., Dubois Ch. Proc. R. Soc. A. 2011.V.467. P. 3241.

15. Minnich J., Johnson J.A., Schmidt A.J., Esfarjani R., Dresselhaus M.S., Nelson K.A., Chen G. Phys. Rev. Lett. 2011. V.107. P.095901.

16. Fourier J.P.J. The Analytical Theory of Heat. Cambridge University Press, London, 1878.

17. Casimir H.B.G. Physika. 1938. V.5. P.495.

18. Baringhaus J., Ruan M., Edler F. at all. Nature. 2014.V.506. P.349.

19. Hochbaum A.I.,Chen R., Delgado R.D., Liang W., Garnett E.C., Najarian M., Majumdar A., Yang P. Nature. (London). 2008. V.451. P.163.

20. Bonkai A.I., Bunimovich Y.,Tahir-Kheli J., Yu J.-K., Goddard W.A., Heath J.R. Nature. (London). 2008. V.451. P.168.

21. Paddock C.A., Eesley G.L. J. Appl. Phys. 1986. V.60. P.285.

22. Maldovan M. Appl. Phys.Lett. 2012. V.101. P.113110.

23. Cahill D.G. Rev. Sci. Instrum. 1990. V.61. P.802.

24. Both S., Czul B., Fulop T., Gryf Gy., Gyenis B., Kovacs R., Van P., Verhas J. J. Non-Equilibrium Thermodynamics. Online first. 2016. (arXiv: 1506. 05764).

25. Taug D.W., Araki N. Materials Science and Engineering: A.2000. V.292. №2. P.173.

26. Kaminski W.J. Heat Transfer. 1990. V.112. P.555.

27. Mitra K., Kumar S., Vedavarz A., Moallemi M.K. J. Heat Transfer. 1995. V.117. P.568.

28. Herwig H., Beckert K. J. Heat Transfer. 2000. V.122. №2. P.363.

29. Roetzel W., Putra N., Das S.K. Int. J. Thermal Sc. 2003. V.42. №6. P.541.

30. Scott E.P., Tilahun M., Vick B. J. Biomechanical Eng. 2009. V.131. P.074518.

31. Cattaneo C. Camptes Rendus de l'Acad. Sc. Paris. 1958. V.247. P.431.

32. Chen Gang. Phys. Rev. Lett. 2001. V.86. №11. P.2297.

33. Zhang Yujie, Ye Wenging. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2015. V.83. P.51.

34. Kovacs R., Van P. Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V.83. P.613.

35. Van P., Fulop T. Annalen der Physik. 2012. V.524. P.470.

References

1. Koshliakov N.S., Hlyner Э.В., Smyrnov M.M. Uravnenyia v chastnыkh proyzvodnыkh matematycheskoi fyzyky. M.: Vыsshaia shkola, 1970. 712 s. (in Russian)

2. Musii R.S., Oryshchyn O.H., Zashkilniak I.M., Klaichuk M.I. Dyferentsialni rivniannia ta rivniannia matematychnoi fizyky. Lviv: Rastr-7, 2018. 250 s. (in Ukrainian)

3. Vladymyrov V.S. Uravnenyia matematycheskoi fyzyky. M.: Nauka, 1971. (in Russian)

4. Mykhlyn S.H. Kurs matematycheskoi fyzyky. M.: Nauka, 1968. (in Russian)

5. Sobolev S.L. Uravnenyia matematycheskoi fyzyky.M.-L.: Nauka, 1950. (in Russian)

6. Tykhonov A.N., Samarskyi A.A. Uravnenyia matematycheskoi fyzyky. M.: Nauka, 1972. (in Russian)

7. Nedoseka A.Ia. Osnovы rascheta svarnыkh konstruktsyi. K.: Vyshcha shkola. Holovnoe yzd-vo, 1988. 263 s. (in Russian)

8. Shvartsburh A.B. Vydeoympulsы y neperyodycheskye volnы v dysperhyruiushchykh sredakh. Uspekhy fyzycheskykh nauk. 1998. T. 168. № 2. S. 85-103. (in Russian)
9. Chovniuk Yu.V. Nestatsyonarnыe termoupruhye polia v dysperhyruiushchykh, dyssypatyvnykh deformyruemыkh sredakh (telakh) y kompozytsyonnыkh materyalakh pry ykh lazernoi obrabotke korotkymy volnovыmy ympulsamy. Visnyk Cherkaskoho inzhenerno-tekhnolohichnoho instytutu. 2001. № 4. S. 58-65. (in Russian)
10. Zhukovskyi K.V. Tochnoe reshenye hyperbolycheskoho uravnenyia teploprovodnosty y uravnenyia typa Hiuera-Krumkhanslia. Uchenыe zapysky fyzycheskoho fakulteta Moskovskoho unyversyteta. 2017. № 4. S. 1740301-1 − 1740301-16. (in Russian)
11. Dattoli G., Srivastava H.M., Zhumkovsky K.V. Apple. Math. Comput. 2007. V.184. P. 979.
12. Zhukovsky K. Sci. World J. 2014. Article ID 454865. P.1.
13. Zhukovsky K.V. Mosc. Univ. Phys. Bull. 2015. V.70. №2. P.93.
14. Lebon G., Machrafi H., Gremela M., Dubois Ch. Proc. R. Soc. A. 2011.V.467. P. 3241.
15. Minnich J., Johnson J.A., Schmidt A.J., Esfarjani R., Dresselhaus M.S., Nelson K.A., Chen G. Phys. Rev. Lett. 2011. V.107. P.095901.
16. Fourier J.P.J. The Analytical Theory of Heat. Cambridge University Press, London, 1878.
17. Casimir H.B.G. Physika. 1938. V.5. P.495.
18. Baringhaus J., Ruan M., Edler F. at all. Nature. 2014.V.506. P.349.
19. Hochbaum A.I.,Chen R., Delgado R.D., Liang W., Garnett E.C., Najarian M., Majumdar A., Yang P. Nature. (London). 2008. V.451. P.163.
20. Bonkai A.I., Bunimovich Y.,Tahir-Kheli J., Yu J.-K., Goddard W.A., Heath J.R. Nature. (London). 2008. V.451. P.168.
21. Paddock C.A., Eesley G.L. J. Appl. Phys. 1986. V.60. P.285.
22. Maldovan M. Appl. Phys.Lett. 2012. V.101. P.113110.
23. Cahill D.G. Rev. Sci. Instrum. 1990. V.61. P.802.
24. Both S., Czul B., Fulop T., Gryf Gy., Gyenis B., Kovacs R., Van P., Verhas J. J. Non-Equilibrium Thermodynamics. Online first. 2016. (arXiv: 1506. 05764).
25. Taug D.W., Araki N. Materials Science and Engineering: A.2000. V.292. №2. P.173.
26. Kaminski W.J. Heat Transfer. 1990. V.112. P.555.
27. Mitra K., Kumar S., Vedavarz A., Moallemi M.K. J. Heat Transfer. 1995. V.117. P.568.
28. Herwig H., Beckert K. J. Heat Transfer. 2000. V.122. №2. P.363.

29. Roetzel W., Putra N., Das S.K. Int. J. Thermal Sc. 2003. V.42. №6. P.541.
30. Scott E.P., Tilahun M., Vick B. J. Biomechanical Eng. 2009. V.131. P.074518.
31. Cattaneo C. Camptes Rendus de lAcad. Sc. Paris. 1958. V.247. P.431.
32. Chen Gang. Phys. Rev. Lett. 2001. V.86. №11. P.2297.
33. Zhang Yujie, Ye Wenging. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2015. V.83. P.51.
34. Kovacs R., Van P. Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V.83. P.613.
35. Van P., Fulop T. Annalen der Physik. 2012. V.524. P.470.

Аннотация

Човнюк Юрий Васильевич кандидат технических наук, профессор МКА, Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины.

Чередниченко Петр Петрович доцент Киевского Национального университета строительства и архитектуры.

Кравчук Владимир Тимофеевич кандидат технических наук, доцент Киевского Национального университета строительства и архитектуры.

Остапущенко Ольга Павловна кандидат технических наук, доцент Киевского Национального университета строительства и архитектуры.

Иванов Евгений Александрович, Национальный авиационный университет, г. Киев.

Моделирование и аналіз нестационарных теплових полей деформированных сред (элементов металлоконструкций строений) при их лазерной обработке короткими волнивыми импульсами.

Обоснована математическая модель для анализа нестационарных термоупругих полей деформированных сред (элементов металлоконструкций сооружений, капиллярно-пористых тел, покрытых тонкой металлической (нано-)плёнкой, композиционных материалов), широко применяемых в современном строительстве, при их лазерной обработке короткими волновыми импульсами. Получены точные аналитические решения уравнений теплопроводности, которые моделируют взаимодействие коротких лазерных импульсов и позволяют в дальнейшем определять компоненты термонапряженно-деформированного состояния обрабатываемых материалов, в частности, тонких пленок пористых, капиллярно-пористых тел. В качестве метода анализа использованы два: 1) традиционный метод разделения переменных (метод Фурье); 2) нефурье-анализ нестационарных тепловых полей, которые описываются известным в литературе телеграфным уравнением. Полученные результаты могут в дальнейшем быть использованы для установления параметров термонапряженно-деформированного состояния материалов, взаимодействующих с короткими волновыми импульсами лазерного излучения.

Ключевые слова: моделирование; анализ; нестационарность; температурные поля; деформированные среды; элементы металлоконструкций сооружений; капиллярно-пористые тела; наноплёнки; лазерное излучение; короткие волновые импульсы.

Annotatin

Chovnyuk Yuriy Ph.D., Professor ISA, National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine.

Cherednichenko Petro Associate Professor, Kyiv National University of Construction and Architecture.

Kravchyuk Volodymyr Ph.D., Associate Professor, Kyiv National University of Construction and Architecture.

Ostapushchenko Olga Ph.D., Associate Professor, Kyiv National University of Construction and Architecture.

Ivanov Eugenie Senior lecturer, National Aviation University, Kyiv, Ukraine.

Modeling and analysis of the deformed media (metal construction elements) non stationary thermal fields during their laser short waves pulses treatment.

Substantiated mathematical model for non-stationary thermoelastic deformed media during their laser processing by short waves pulses fields analysis is proposed . Precise analytical solutions of the thermal conductivity equations which simulate the short laser pulses interaction and allow to further determine their components thermally stress-strain state of the processed materials, in particular, thin porous films, capillary-porous bodies are obtained. Two analysis methods were used: 1) traditional separating variables method (Fourier method), 2) non-Fourier analysis of the non-stationary thermal fields that described by the telegraphic equation known in the literature. The results obtained in this work can be used further to establish the thermo stress-strain state of materials interacting with short waves laser radiation pulses parameters. Such approach is used at the modern building process for the rising of the reliability, durability and strength of the metal construction elements.

Keywords: modeling; analysis; nonstationarity; temperature fields; deformed media nanofilms; metal construction elements; composite materials; capillary-porous materials; laser radiation; short waves pulses.